理科高等代数串讲

leoxwang at buaa.edu.cn

目录

1 数域

定义.（数域）集合 $F \subseteq \mathbb{C}$，如果它满足

(1) $0,1 \in F$；

(2) F 对于加、减、乘除封闭

则称 F 是一个数域

常见的例子：$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$，其中 $\mathbb{Q}$ 是最小的数域。
高等代数中的许多问题都和数域的性质有关，例如多项式理论，$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 上的因式分解差别很大。

2 线性方程组的求解

Gauss 消元法/矩阵消元法，它们的本质都是通过初等行变换得到最简阶梯形，然后读出解

例 1 在数域 F 上求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

定理 2.1 (解存在的条件，结构定理) 将 n 元方程组的增广矩阵化为最简阶梯形，记系数矩阵非零行个数为 r，增广矩阵非零行个数为 $\tilde{r}$

(1) 如果 $r<\tilde{r}$，则有矛盾方程，此时方程组无解；

(2) 如果 $r=\tilde{r}$，则方程组有解，而且通解中有 $n-r$ 个独立取值的参数

推论 2.2 齐次线性方程组总是有解，而且

(1) 如果 $r=n$，方程组只有零解；

(2) 如果 $r<n$，方程组有无穷多组解

推论 2.3 如果齐次线性方程组的未知数个数多于方程个数，那么一定有无穷组解

例 2 齐次线性方程组 $AX=0, A\in M_{m\times n}(F)$ 有非零解的充要条件是_____

例 3 数域 F 上的线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有解的充分必要条件是_____

定理 2.4 数域 F 上的 n 元**齐次**线性方程组 $AX=0$，它的解集构成一个线性空间，一组基被称为方程组的基础解系，而且满足维数公式

$$\dim V_A = n - \operatorname{rank} A$$

定理 2.5 数域 F 上的 n 元**非齐次**线性方程组 $AX=B$，设 γ 是一个特解，导出组 $AX=0$ 的一个基础解系是 $X_1,\cdots,X_{n-r}$，则它的通解为

$$X=\gamma+k_1X_1+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$$

例 4 设 $A \in M_{n\times(n+1)}(F), \operatorname{rank} A = n$，且 A 每一行的元素之和为 0，求证 A 的任意 n 阶子式不为 0

例 5 设 $A \in M_{m\times n}(F)$，则非齐次线性方程组 $AX = B$ 至多有_____ 个线性无关的解

例 6 设 α_1, α_2 是含有三个未知数的线性方程组 $AX = \beta$ 的两个不同的解，且 $\operatorname{rank} A = 2$，则 $AX = B$ 的通解为_____

(A) $\alpha_1 + k\alpha_2$；

(B) $\dfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + k(\alpha_1 - \alpha_2)$；

(C) $2\alpha_1 + k(\alpha_1 - \alpha_2)$；

(D) $k_1\alpha_2 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2)$

例 7 线性方程组 $AX = B$ 的系数矩阵 $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$，且 A 的行向量组线性无关，则下列命题错误的是_____

(A) 齐次线性方程组 $A^TY = 0$ 只有零解；

(B) 齐次线性方程组 $A^TAX = 0$ 必有非零解；

(C) $\forall B \in \mathbb{R}^4$，方程组 $AX = B$ 必有无穷多解；

(D) $\forall B \in \mathbb{R}^5$，方程组 $A^TX = B$ 必有唯一解

例 8 考虑数域 F 上的非齐次线性方程组 $AX = B$，其中 $A \in M_{4\times 6}(F), B \neq 0 \in F^4$。已知 $\operatorname{rank} A = 3$，则该线性方程组的解集生成的子空间维数为_____

例 9 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系，则下列向量组也可作为 $AX = 0$ 基础解系的是_____

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$；

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$；

(C) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$；

(D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1$

例 10 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，证明 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^TA$

3 线性空间的概念

定义.（线性空间）V 是一个非空集合，F 是一个数域，如果在 V 中定义加法和数乘 $(+, \cdot)$，满足以下运算律

(1) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；

(2) 存在零元 0，$\forall \alpha \in V, \alpha + 0 = \alpha$；

(3) $\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V, \alpha + \beta = 0$；

(4) $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$；

(5) $\forall k, l \in F, \alpha \in V, k(l\alpha) = (kl)\alpha$；

(6) $\forall k, l \in F, \alpha \in V, (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$；

(7) $\forall k \in F, \alpha, \beta \in V, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$；

(8) $\forall \alpha \in V, 1\alpha = \alpha$

则称 V 是 F 上的线性空间

定义.（子空间）设 W 是 $(V,+,\cdot)$ 的非空子集，若 $(W,+,\cdot)$ 是线性空间，则称 W 是 V 的子空间，记作 $W \leqslant V$

以下总用 V 表示某个数域 F 上的线性空间，它的元素被称为向量

常见的线性空间：

(1) F^n；

(2) $M_{m\times n}(F)$；

(3) $F[x]$；

(4) $F[x]_n$；

(5) $\mathrm{C}(\mathbb{R})$；

(6) $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$；

(7) $\mathrm{C}^k(\mathbb{R})$；

(8) $\mathrm{R}(\mathbb{R})$

例 11 设集合 $W=\{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3|y_1+y_2+y_3=a\}$，且 W 继承了 $\mathbb{R}^3$ 中的加法和数乘，则下列说法中一定成立的是_____

(A) 对任意 a，W 都是线性空间；

(B) 对任意 a，W 都不是线性空间；

(C) 只有当 $a=0$ 时，W 才是线性空间；

(D) 只有当 $a\neq 0$ 时，W 才是线性空间

4 线性组合与相关性

定义.（线性等价）设 $S,T\subseteq V$，如果它们互为线性组合，则称它们线性等价，记作 $S\cong T$

定义.（线性相关性）设向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$，如果存在不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，使得 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k=0$，则称这一向量组线性相关，否则称线性无关

例 12 设 n 元非齐次线性方程组 $AX=B$ 的系数矩阵的秩为 r，且解集非空，则其解集中至多有_____ 个线性无关的向量

例 13 下列向量组中线性无关的是_____

(A) $(1,2,3,4)^T,(2,3,4,5)^T,(0,0,0,0)^T,(1,2,3,4)^T$；

(B) $(1,2,-1)^T,(3,5,6)^T,(0,7,9)^T,(1,0,2)^T$；

(C) $(a,1,2,3)^T,(b,1,2,3)^T,(c,3,4,5)^T,(d,0,0,0)^T$；

(D) $(a,1,b,0,0),(c,0,d,6,0),(a,0,c,5,6)$；

例 14 在 $V=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$ 中，定义加法和数乘分别为

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$$
$$k\otimes(a,b)=\left(ka,kb+\frac{2}{3}k(k-1)a^2\right),k\in\mathbb{R}$$

则 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。设 $p\in\mathbb{R}$，若 $(1,1)$ 和 $(2,p)$ 线性相关，则 $p=$_____

例 15 设**非零**矩阵 A,B 满足 $AB=0$，则必有

(A) A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关；

(B) A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关；

(C) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关；

(D) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关

例 16 设 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ 而且互不相同，证明 $\{e^{a_1x},\cdots,e^{a_nx}\}$ 是 $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ 中的线性无关向量组

例 17 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_p\}\subseteq\mathbb{R}^m$ 线性无关，$\beta\neq 0\in\mathbb{R}^n$，证明 $\{\alpha_1\beta^T,\cdots,\alpha_p\beta^T\}\subseteq M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 同样线性无关

5 向量组的秩

定义.（极大线性无关组）设 $S\subseteq V$，如果 $M\subseteq S$ 线性无关，而且添加 S 中任何向量就线性相关，则称 M 是 S 的一个极大线性无关组

定义.（等价定义）设 $S\subseteq V$，如果 $M\subseteq S$ 线性无关，而且可以线性表出 S 中的所有向量，则称 M 是 S 的一个极大线性无关组

定理 5.1 设 $S_1,S_2\subseteq V$，而且 $\#S_1<\#S_2$，如果 S_2 是 S_1 的线性组合，则 S_2 线性相关

定义.（向量组的秩）如果向量组 $S\subseteq V$ 的一个极大线性无关组含有向量的个数为 r，则称 S 的秩为 r，记作 $\operatorname{rank} A=r$

例 18 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 的秩为 4，那么从该向量组中任取 3 个向量组成的向量组的秩最小可能为_____

例 19 以下命题中正确的有_____ 个

(1) 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 等价，则它们的秩相等；

(2) 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的秩相等，则它们等价；

(3) 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的秩相等，且前者可由后者线性表出则它们等价；

(4) 若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 不等价，则它们的秩不相等

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3

例 20 设 $A\in M_n(F),\exists\, k\in\mathbb{N}^*,\operatorname{rank} A^k=\operatorname{rank} A^{k+1}$，证明存在 $B\in M_n(F)$，使得 $A^k=BA^{k+1}$

例 21 设 $A\in M_n(F),\exists\, k\in\mathbb{N}^*,\operatorname{rank} A^k=\operatorname{rank} A^{k+1}$，证明存在 $B\in M_n(F)$，使得 $A^k=A^{k+1}B$

6 线性空间的基

定义.（线性空间的基和维数）如果存在线性无关向量组 $W\subseteq V$，使得 W 可以线性表出 V 中任意向量，则称 W 是 V 的一组基，称 W 中元素的个数 $\#W$ 为 V 的维数，记作 $\dim V$

例 22 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上所有 4 阶反对称矩阵构成的集合，若将 V 看作 $\mathbb{R}^{4\times4}$ 的子空间，则 $\dim V=$_____

例 23 在数域 F 上，设 E 为 2 阶单位阵，$I=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix},J=\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix},K=\begin{pmatrix} & -1\\ -1 & \end{pmatrix}$

(1) 试证明：E,I,J,K 是 $M_n(F)$ 的一组基；

(2) 求 I^2,JK 在这组基下的坐标

例 24 给定数域 F 上两个 n 元齐次线性方程组 $AX=0,BY=0$，给出它们有相同解空间的充要条件

7 同态与同构

定义.（线性同态）设 V_1,V_2 是 F 上的线性空间，如果映射 $\varphi:V_1\to V_2$ 满足

(1) $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\forall\alpha,\beta\in V_1$；

(2) $\varphi(\lambda\alpha)=\lambda\varphi(\alpha),\forall\lambda\in F,\alpha\in V_1$

则称 φ 是从 V_1 到 V_2 的同态映射

定义.（线性同构）设 V_1,V_2 是 F 上的线性空间，如果映射 $\varphi:V_1\to V_2$ 满足

(1) φ 是同态映射；

(2) φ 是一一映射

则称 φ 是从 V_1 到 V_2 的同构映射，并且称 V_1 和 V_2 同构，记作 $V_1\cong V_2$

定理 7.1

(1) 如果 $\varphi:V_1\to V_2$ 是线性同态，则 $S\subseteq V$ 线性相关 $\Rightarrow\varphi(S)$ 线性相关；

(2) 如果 $\varphi:V_1\to V_2$ 是线性同构，则 $S\subseteq V$ 线性相关 $\Leftrightarrow\varphi(S)$ 线性相关

定理 7.2 F 上任意一个 n 维线性空间都和 F^n 同构

例 25 设 $X_1,\cdots,X_s$ 为 n 维列向量，$A\in M_{m\times n(F)}$，则下列说法正确的是_____

(A) 若 $X_1,\cdots,X_s$ 线性相关，则 $AX_1,\cdots,AX_s$ 线性相关；

(B) 若 $X_1,\cdots,X_s$ 线性相关，则 $AX_1,\cdots,AX_s$ 线性无关；

(C) 若 $X_1,\cdots,X_s$ 线性无关，则 $AX_1,\cdots,AX_s$ 线性相关；

(D) 若 $X_1,\cdots,X_s$ 线性无关，则 $AX_1,\cdots,AX_s$ 线性无关

例 26 任取 $c\in\mathbb{R}$

(1) 证明在 $\mathbb{R}[x]_n$ 中，$\{1,x-c,\cdots,(x-c)^{n-1}\}$ 构成一组基；

(2) 求 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在这组基下的坐标

例 27 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 是 F^m 的一组基，$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是 F^n 的一组基，证明 $\{\alpha_i\beta_j^T|1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$ 是 $M_{m\times n}(F)$ 的一组基

8 子空间的交与和

定义.（两个子空间的交与和）设 $W_1,W_2\subseteq V$ 是子空间

(1) 称 $W_1\cap W_2=\{\alpha\in V|\alpha\in W_1,W_2\}$ 为它们的交；

(2) 称 $W_1+W_2=\{\alpha+\beta\in V|\alpha\in W_1,\beta\in W_2\}$ 为它们的和

定理 8.1 $W_1\cap W_2,W_1+W_2$ 都是线性空间，而且

(1) $W_1\cap W_2$ 是含于 W_1,W_2 的最大的线性空间；

(2) W_1+W_2 是包含 W_1,W_2 的最小的线性空间

从两个子空间的交与和可以（归纳地）定义更多空间的交与和，以上定理依然成立

定理 8.2 设 $W_1,W_2\subseteq V$ 是子空间，则有

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2$$

例 28 给定 F^4 的子空间 W_1 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和子空间 W_2 的基 $\{\beta_1,\beta_2\}$，其中

$$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0),\beta_1=(1,2,3,4),\beta_2=(0,1,2,2)$$

分别求 $W_1+W_2,W_1\cap W_2$ 的维数并各求出一组基

定义.（两个子空间的直和）设 $W_1,W_2\subseteq V$ 是子空间，若在 $W=W_1+W_2$ 中，每个向量的分解式

$$w=w_1+w_2,w_1\in W_1,w_2\in W_2$$

唯一，则称 W 是它们的直和，记作 $W=W_1\oplus W_2$

定理 8.3 设 $W_1,W_2\subseteq V$ 是子空间，$W=W_1+W_2$，则以下条件等价

(1) W 是直和；

(2) W 中每个向量的分解式唯一；

(3) W 中零向量的分解式唯一；

(4) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$；

(5) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$；

(6) 取 W_1, W_2 的极大线性无关组 S, T，则 $S \cup T$ 构成 W 的一个极大线性无关组

例 29 设 $A \in M_n(F), A^2 = -A$，设 $V_1 = \{X \in F^n | AX = 0\}, V_2 = \{X \in F^n | (A+I)X = 0\}$

(1) 证明 $V_1 \oplus V_2 = F^n$；

(2) 证明 $\text{rank } A + \text{rank}(A+I) = n$

例 30 设 $A \in M_n(F), \text{rank } A = n-1$，记 A 的伴随矩阵为 A^*，记齐次线性方程组 $AX = 0, A^*X = 0$ 的解空间分别为 V_A, V_{A^*}，试证明 $F^n = V_A \oplus V_{A^*} \iff \text{tr } A^* \neq 0$

9 行列式

需要知道排序、逆序的概念，会计算逆序数，以及根据定义求行列式

定理 9.1 设 $A \in M_m(F), B \in M_n(F)$，则 $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

例 31 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中项 $a_{23}a_{42}a_{31}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前的符号为_____

例 32 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

定理 9.2

(1) $|A| = |A^T|$；

(2) 如果行列式的某一行（列）有公因数 k，则 k 可以提到行列式外；

(3) 互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号；

(4) 如果行列式中两行（列）对应元素成比例，那么行列式的值为 0；

(5) 如果行列式某行（列）元素可以写成两数之和，那么行列式可以拆分为两个行列式之和；

(6) 将某一行（列）的元素同时乘 k 并加到另一行（列），行列式的值不改变

例 33（判断）奇数阶反对称矩阵不可逆；

例 34（判断）$n(n\geqslant 2)$ 阶行列式中若所有元素都是 ±1，那么行列式值不可能取 ±1

例 35 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值为_____

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$；

(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$；

(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

例 36 设 $A\in M_n(F)$，并且 $A\xrightarrow{(2,3)}B\xrightarrow{-3(4)+(1)}C\xrightarrow{\frac{1}{2}(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $|A|=$_____

(A) 3；　(B) -3；　(C) 12；　(D) -12

例 37 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$$

例 38 计算 n 阶行列式的值

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

10 展开定理

定理 10.1 *(1)* 行列式的值等于它的任意一行（列）各元素与其对应的代数余子式乘积之和；

(2) 行列式中某一行（列）与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和为 0

以上两条即 $\sum\limits_{i=k}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，$\sum\limits_{i=k}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}|A|, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

例 39 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$，用 A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}kA_{k1}=$_____

例 40 求行列式 D_n 的值，其中

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

11 Cramer 法则

定理 11.1 （Cramer 法则）设数域 F 上线性方程组 $AX = B$ 满足 $A \in M_n(F)$ 而且 $D = |A| \neq 0$，则这一方程组有唯一解，并且可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 D_i 是将 D 的第 i 列替换为 B 所得的行列式

推论 11.2 设 $A \in M_n(F)$，则下列论断等价

(1) $|A| \neq 0$;

(2) A 的列向量组线性无关;

(3) A 的行向量组线性无关;

(4) $\mathrm{rank}\ A = n$

例 41 设矩阵 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times m}(F)$，则_____

(A) 当 $m > n$ 时，必有行列式 $|AB| \neq 0$;

(B) 当 $m > n$ 时，必有行列式 $|AB| = 0$;

(C) 当 $m < n$ 时，必有行列式 $|AB| \neq 0$;

(D) 当 $m < n$ 时，必有行列式 $|AB| = 0$

例 42 设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times m}(F), m > n$，则下列结论正确的是_____

(A) $|AB| > 0$;

(B) $|AB| = 0$;

(C) $|AB| < 0$;

(D) $|AB|$ 不存在;

例 43 是否存在区间 $[2022, 2023]$ 上的四个实连续函数 $a_{ij}(t)$，同时满足

(1) 对于任意 $t \in [2022, 2023]$，$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ 可逆;

(2) $A(2022) = \begin{pmatrix} \sin 2022 & \cos 2022 \\ -\cos 2022 & \sin 2022 \end{pmatrix}, A(2023) = \begin{pmatrix} -\sin 2023 & \cos 2023 \\ \cos 2023 & \sin 2023 \end{pmatrix}$

例 44 设 $A \in M_n(F), |A| = d \neq 0$，并且每行元素之和为 c，试计算所有代数余子式之和 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}$

12 数域上的矩阵

熟悉矩阵的加法、数乘、乘法运算，看清矩阵的形状

定理 12.1 设 $A, B \in M_n(F)$，则 $|AB| = |A||B|$

例 45 回答下列问题

(1) 是否存在实二阶方阵 A，使得 $A^2 = -I$?

(2) 是否存在 5 阶方阵 A，使得 $A^3 = 0, A^2 \neq 0$?

(3) 设 A 为方阵，若存在 $k \in \mathbb{N}^*$，使得 $A^k = 0$，则称 A 为幂零方阵。两个同阶幂零方阵的乘积是否是幂零方阵？

学会从**线性组合**的角度理解矩阵乘法

例 46 设 $A \in M_n(F), \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \text{rank } A^k = \text{rank } A^{k+1}$，证明存在 $B \in M_n(F)$，使得 $A^k = BA^{k+1}$

例 47 设 $A \in M_n(F), \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \text{rank } A^k = \text{rank } A^{k+1}$，证明存在 $B \in M_n(F)$，使得 $A^k = A^{k+1}B$

熟悉分块矩阵的运算，注意分块要保证乘法的合理性

例 48 设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{p\times q}(F), M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，则下列说法正确的有_____

(1) 如果 $C = 0$，则 $\text{rank } M = \text{rank } A + \text{rank } B$；

(2) 对于一般的矩阵 C，有 $\text{rank } M = \text{rank } A + \text{rank } B$；

(3) 对于一般的矩阵 C，有 $\text{rank } M \leqslant \text{rank } A + \text{rank } B$；

(4) 对于一般的矩阵 C，有 $\text{rank } M \geqslant \text{rank } A + \text{rank } B$；

(A) *(1)(2)*；　(B) *(1)(3)*；　(C) *(1)(4)*；　(D) *(1)*

例 49 设 $A, B \in M_n(F)$，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$$

熟悉可逆矩阵的定义，掌握计算方法

定义.（逆矩阵）设 $A \in M_n(F)$，若存在 $B \in M_n(F)$，使得 $AB = BA = I$，则称 B 为 A 的逆矩阵，此时 A 称为可逆矩阵

例 50（判断）若矩阵 A, B 的乘积 $AB = I_n$，那么 A, B 互为逆矩阵；

例 51 下列四个关于矩阵的逆的说法正确的有_____

(1) 可逆对称矩阵的逆还是对称矩阵；

(2) 可逆上三角矩阵的逆还是上三角矩阵；

(3) 初等矩阵的逆还是初等矩阵；

(4) 反对称矩阵一定不可逆

(A) *(1)(3)*；　(B) *(1)(2)(3)*；　(C) *(1)(3)(4)*；　(D) *(1)(2)(3)(4)*；

例 52 设 $A, B, C \in M_n(F), B = I + AB, C = A + CA$，则 $B - C =$_____

例 53 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A, P$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $(AP)^{-1} = -(PB)^{-1}$，则 $|A| =$_____

例 54 设 $A, B \in M_n(F)$，而且 $I - AB$ 可逆，证明 $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$

定义.（伴随矩阵）设 $A \in M_n(F)$，则 $A^* := (A_{ji})$

定理 12.2 $A^*A = AA^* = |A|I$，并且如果 A **可逆**，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*, A^* = |A|A^{-1}$

例 55 设 $A \in M_n(F)$，则 $\operatorname{rank} A^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} A = n \\ 1, & \operatorname{rank} A = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} A < n-1 \end{cases}$

例 56 设 $A, B, C \in M_n(F), ABC = I$，则 $C^*B^*A^* =$_____

例 57 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$，若 $\operatorname{rank} A^* = 1$，则 $a =$_____

(A) 1 或 $-\dfrac{1}{3}$；　(B) 1；　(C) $-\dfrac{1}{3}$；　(D) 3

例 58 设 $A \in M_n(F), n > 2$，则 $(A^*)^* =$_____

例 59 设 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(1) 求 A；

(2) 当 $|A| < 0$ 时，求解矩阵方程 $A^{-1}XA = XA + I$

13　初等矩阵与矩阵变换

熟悉三类初等矩阵，掌握它们的计算，用它们来表示初等行（列）变换

熟悉矩阵的相抵标准形，掌握它的性质和计算方法

定理 13.1 设 $A \in M_{m\times n}(F)$，则 A 可以经过有限次初等变换化为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $r = \operatorname{rank} A$

推论 13.2 设 $A \in M_{m\times n}(F)$，则存在可逆矩阵 $P \in M_m(F), Q \in M_n(F)$，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

掌握分块矩阵的初等变换，用矩阵的乘法进行描述

例 60 设 $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times m}(F)$，证明 $|I_m - AB| = |I_n - BA|$

【提示：注意到 $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$ 即可】

例 61 设 $A \in M_3(F)$，将矩阵 A 的第一行加到第二行得到矩阵 B，再交换矩阵 B 的第二行与第三行得单位矩阵。

若记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 则矩阵 $A =$_____

(A) $P_1^{-1}P_2$； (B) P_1P_2； (C) $P_1P_2^{-1}$； (D) $P_2P_1^{-1}$；

例 62 若 $\alpha = (1, 2, \cdots, 2021)$，则行列式 $|I_{2021} - \alpha^T\alpha|$ 的值为_____

例 63 用初等行变换将矩阵 A 化作相抵标准形 S，并求出使 $PAQ = S$ 的可逆矩阵 P, Q，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

例 64 设 $A \in M_{m\times n}(F), \operatorname{rank} A = r$，证明存在秩为 r 的 $P \in M_{m\times r}(F)$ 和秩为 r 的 $Q \in M_{r\times n}(F)$，使得 $A = PQ$

14 秩的第二种定义，秩不等式

定义.（秩的子式定义）设 $A \in M_{m\times n}(F)$，如果存在一个非零 r 阶子式，并且所有 $r+1$ 阶子式（若存在）都为零，则称 r 为 A 的秩，记作 $\operatorname{rank} A = r$

定理 14.1 初等行列变换不改变矩阵的秩

熟悉通过子式定义的秩，掌握重要的秩不等式（注意使用条件）

如果时间充足，建议学会它们的证明

定理 14.2 （一些重要的秩不等式）

(1) $A \in M_{n\times s}(F), B \in M_{n\times t}(F)$，则 $\max\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

(2) $A, B \in M_{m\times n}(F)$，则 $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$；

(3) $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times l}(F)$，则 $\operatorname{rank} AB \leqslant \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$；

(4) $A \in M_{m\times n}(F), B \in M_{n\times l}(F)$，则 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n + \operatorname{rank} AB$

例 65 已知矩阵 $A \in M_{n\times(n+1)}(F), \operatorname{rank} A = n$，且 A 每一行的元素之和为 0，求证 A 的任意 n 阶子式不为 0

例 66（判断）存在两个 3×3 秩为 2 的矩阵 A,B 使得 $AB=0$

例 67 设 $A,B\in M_n(F)$，证明

(1) 若 $AB=0$，则 $\text{rank }A+\text{rank }B\leqslant n$；

(2) 若 $|A+B|\neq 0$，则 $\text{rank }A+\text{rank }B\geqslant n$

例 68 设 $A\in M_n(F)$，证明存在 $m\in\mathbb{N}^*$，使得 $\text{rank }A^m=\text{rank }A^{m+1}$

例 69 设 $A\in M_n(F),A^2=-A$，设 $V_1=\{X\in F^n|AX=O\},V_2=\{X\in F^n|(A+I)X=O\}$

(1) 证明 $V_1\oplus V_2=F^n$；

(2) 证明 $\text{rank }A+\text{rank}(A+I)=n$

例 70 设 $A\in M_n(F),A^2=I$，证明 $\text{rank}(A+I)+\text{rank}(A-I)=n$

例 71 设 $a,b,c,d\in\mathbb{C},A\in M_n(\mathbb{C}),ac\neq 0,ad\neq bc$，若 $(aA+bI)(cA+dI)=0$，则 $\text{rank}(aA+bI)+\text{rank}(cA+dI)=n$
【提示：令 $B=\dfrac{2ac}{bc-ad}A+\dfrac{bc+ad}{bc-ad}I$，则有 $(B+I)(B-I)=0$，使用上一例题结果即可】

例 72 设 $A\in M_n(F),k\in\mathbb{N}$，证明 $\text{rank }A^k-\text{rank }A^{k+1}\geqslant\text{rank }A^{k+1}-\text{rank }A^{k+2}$

例 73 设 $A\in M_n(F)$，若存在 $m\in\mathbb{N}$，使得 $\text{rank }A^m=\text{rank }A^{m+1}$，证明 $\forall k\in\mathbb{N},\text{rank }A^m=\text{rank }A^{m+k}$

例 74 设 $A,B\in M_{m\times n}(F)$，证明 $\text{rank }A+\text{rank }B+\text{rank}(A+B)\geqslant\text{rank}\begin{pmatrix}A & B\end{pmatrix}+\text{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$

15 数域上的多项式

掌握基本运算，熟悉带余除法的计算
从线性空间的角度理解多项式的相等

定理 15.1 $F[x]$ 是数域 F 上的无穷维线性空间，$\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ 构成它的一组基

推论 15.2 两个多项式相等 $\Longleftrightarrow$ 相同次数项的系数相同

定理 15.3 （带余除法）设 $f(x),g(x)\in F[x],g(x)\neq 0$，则存在唯一的 $q(x),r(x)\in F[x]$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),\deg r(x)<\deg g(x)$$

例 75 设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x),\deg r(x)<\deg g(x),g(x)\neq 0,h(x)\neq 0$，则 $f(x)h(x)$ 除以 $g(x)h(x)$ 所得的商为______，余式为______

例 76 设 $a\neq b$，证明多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 所得的余式为 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}x+f(a)-a\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

例 77 给定 $k\in\mathbb{N},k\geqslant 2$，求所有 $f(x)\neq 0\in\mathbb{R}[x]$，使得 $f(x^k)=(f(x))^k$

熟悉最大公因式的定义（$(f(x),g(x))$ 要求**首一**）、计算方法（辗转相除法）
特别的，熟悉多项式互素的定义和性质

定理 15.4 设 $f(x),g(x)\in F[x],d(x)=(f(x),g(x))$，则存在 $u(x),v(x)\in F[x]$，使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

例 78（判断）设 $f(x),g(x)$ 是数域 F 上的多项式，如果存在 $u(x),v(x)\in F[x]$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，则 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式；

例 79（判断）如果 $f(x),g(x)$ 互素，那么 $f(x^m),g(x^m)$ 互素，这里 $m\in\mathbb{N}^*$；

例 80（判断）如果 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 互素，则 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素；

例 81 设 $(f(x),g(x))=1$，则下列论断不对的是_____

(A) $(f(x),f(x)-g(x))=1$；

(B) $(f(x)+g(x),f(x)-g(x))=1$；

(C) $((f(x))^2,(g(x))^2)=1$；

(D) $(xf(x)-g(x),f(x)-g(x))=1$；

例 82 已知 $f(x)=3x^3-4x+5,g(x)=x^2-2x-1$

(1) 求 $(f(x),g(x))$；

(2) 求多项式 $u(x),v(x)$，使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

熟悉不可约多项式的定义（**次数**$\geqslant 1$）和性质

定义. 设 $f(x)\in F[x],\deg f(x)\geqslant 1$，如果 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x),h(x)\in F[x],\deg g(x),\deg h(x)\geqslant 1$，则称 $f(x)$ 在数域 F 上可约，否则称 $f(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式

定理 15.5 （因式分解的存在和唯一性）设 $f(x)\in F[x],\deg f(x)\geqslant 1$，则它可以分解为 $F[x]$ 中有限个不可约多项式的乘积，并且分解式在不计次序和相差不为零常数倍的意义下是唯一的

例 83（判断）设 $p(x),f(x)\in\mathbb{Q}[x]\backslash\mathbb{Q}$，若 $p(x)$ 不可约且和 $f(x)$ 有公共复根，则 $p(x)\mid f(x)$

例 84 多项式 $f(x)=x^4-x^2-2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的标准分解式为_____

了解重根的定义和判别方法

定理 15.6 设 $k\in\mathbb{N},k\geqslant 1$，$p(x)$ 是不可约多项式，则 $p(x)$ 是 $(f(x),f'(x))$ 的 k 重因式 $\iff$ $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式

例 85 已知多项式 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根，则 $t=$_____

例 86（判断）在 $F[x]$ 中，如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式

例 87（判断）设 $p(x)$ 是数域 F 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式，如果在 $F[x]$ 中 $p(x)$ 的因式只有非零常数和 $p(x)$ 的非零常数倍，那么 $p(x)$ 是 F 上的不可约多项式

例 88（判断）设数域 K 包含数域 $F, f(x) \in F[x]$，如果 $f(x)$ 在 $F[x]$ 中没有重因式，则 $f(x)$ 在 $K[x]$ 中可能有重因式

熟悉 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 上因式分解的特点

定理 15.7

(1) 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$，则 $f(x)$ 可以唯一分解为 $\mathbb{C}[x]$ 中一次因式的乘积；

(2) 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$，则 $f(x)$ 可以唯一分解为 $\mathbb{R}[x]$ 中一次因式或二次不可约因式的乘积

例 89（判断）$x^4 - 3x^3 + 9x - 21$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约

16 有理系数多项式

$\mathbb{Q}[x]$ 上的因式分解实际上可以归结到 $\mathbb{Z}[x]$ 上，这是 Gauss 引理的推论

定理 16.1 （有理根定理）设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$，如果有理数 $c = \frac{s}{t}$ 是 $f(x)$ 的根，其中 $s, t \in \mathbb{Z}, t \neq 0, (s,t) = 1$，则 $t \mid a_n, s \mid a_0$

例 90（判断）设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$，而且首项系数为 1，则 $f(x)$ 的有理根必为整数

例 91 证明 $f(x) = x^3 - 6x - 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

学会使用 Eisenstein 判别法

定理 16.2 （Eisenstein 判别法）设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$，如果存在素数 p 满足

(1) $p \nmid a_n$;

(2) $p \mid a_i, \forall\, 0 \leqslant i \leqslant n-1$;

(3) $p^2 \nmid a_0$

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

例 92（判断）$x^4 - 3x^3 + 9x - 21$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约；

例 93 证明多项式 $f(x) = x^4 + 4kx + 1, k \in \mathbb{N}$ 在有理数域上不可约

例 94 证明多项式 $f(x) = x^p + px + 1, k \in \mathbb{N}$ 在有理数域上不可约，其中 p 是奇素数

17 多项式理论的应用

例 95 用多项式理论证明包含 $\sqrt[3]{3}$ 的最小数域是 $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}] = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

以下问题使用“摄动法”解决

例 96 设 $A,B,C,D\in M_n(F)$，且 $AC=CA$，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$$

【提示：如果 A 可逆，对 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 进行分块变换即可，如果 A 不可逆，考虑 $\lambda I+A$，上式两端都是 λ 的**多项式**】

例 97 设 $A\in M_n(F),B\in M_{1\times n}(F),C\in M_{n\times 1}(F)$，证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & B \\ C & A \end{vmatrix}=-BA^*C$$

例 98 设 $A,B\in M_n(F),AB=BA$，证明 $AB^*=B^*A$

如果没有特别说明，总假定数域为 F，U,V 等是 F 上的有限维线性空间。另外，从第 2 小节开始，我们总考虑线性变换（而非线性映射）。

18 线性映射/变换的概念

定义.（线性映射和线性变换）设 $\sigma:U\to V$ 是一个映射，如果它具有线性性，即

(1) 加法：任意 $\alpha,\beta\in U$，都有 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$；

(2) 数乘：任意 $k\in F,\alpha\in U$，都有 $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

则称 σ 是从 U 到 V 的一个**线性映射**。特别的，如果 $U=V$，即 σ 是从 U 到 U 的一个线性映射，则称 σ 是 U 上的一个**线性变换**。

例 99 考虑 $F[x]_n,n\geqslant 1$ 上的变换 $\sigma:\sigma(f(x))=f(x+3)$，$\sigma$ 是否是线性变换？

线性映射的定义与上学期所学线性空间之间的同态是相同的，它具有以下性质

定理 18.1 （线性映射与线性相关性）

我们将从 U 到 V 的所有线性映射放到一起，这样可以得到一个集合，记作 $L(U,V)$ 或者 $\mathrm{Hom}_F(U,V)$。如果 $U=V$，那么也简记为 $L(U)$ 或者 $\mathrm{End}_F(U)$。赋予 $L(U,V)$ 以下三种运算，可以验证 $(L(U,V),+,\cdot)$ 构成一个 F 上的线性空间。

定义.（$L(U,V)$ 上的运算）

(1) 加法 $+$：$(\sigma+\tau)(\alpha):=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$；

(2) 数乘 $\cdot$：$(k\cdot\sigma)(\alpha):=k(\sigma(\alpha))$；

(3) 复合 $\circ$：$(\sigma\circ\tau)(\alpha):=\sigma(\tau(\alpha))$。

以上运算和矩阵非常相似，这启发我们通过矩阵研究线性映射。

19 线性变换的矩阵

以下总设 U 是 F 上的 n 维线性空间，$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是 U 的一组基。

定理 19.1 （线性变换与基）

(1)（一组基的像可以决定一个线性变换）设任意 n 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in U$，则存在一个线性变换 σ，它满足

$$\sigma(\varepsilon_1)=\alpha_1,\cdots,\sigma(\varepsilon_n)=\alpha_n;$$

(2)（以上关系的唯一性）设 $\sigma,\tau\in L(U)$，如果

$$\sigma(\varepsilon_1)=\tau(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)=\tau(\varepsilon_n)$$

那么便有 $\sigma=\tau$。

例 100 考虑 n 维线性空间 $F[x]_n$，它有一组基 $\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$，对于 $c\in F$，定义映射 $\sigma:\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}\to F[x]_n$

$$\sigma_c(x^m)=(x+c)^m\in F[x]_n, 0\leqslant m\leqslant n-1$$

(1) 可以补充定义，使得 σ_c 成为 $F[x]_n$ 上的线性变换，并且

$$\sigma_c(f(x))=f(x+c)\in F[x]_n, f(x)\in F[x]_n$$

(2) 如果 $c_1\neq c_2$，那么 $\sigma_{c_2}\neq\sigma_{c_2}$。

定义.（线性变换的矩阵）用 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 线性表出 $\{\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)\}$

$$\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}\varepsilon_1+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}\varepsilon_1+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n$$

形式上可以记作 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，这里的矩阵 $A=(a_{ij})$ 被称为 σ 在一组基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的矩阵。

例 101 写出平面 $\mathbb{R}^2$ 上下列线性变换在自然基下的矩阵

(1) 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$；

(2) 关于直线 $y=2x$ 的反射。

从**定理 2.1** 可以证明，取定一组基后一个线性变换和它的矩阵可以**唯一**地互相决定，由此我们可以通过矩阵来描述一个线性变换。作为最初步的性质，我们有

定理 19.2 （线性变换与矩阵的关系）设 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是 U 的一组基，对于任意 $\sigma\in L(U)$，记 $M(\sigma)$ 为 σ 在 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 下的矩阵。则 $M:L(U)\to M_n(F)$ 有以下性质

(1) 双射：任意 $A\in M_n(F)$，**存在**（满的）**唯一**（单的）$\sigma\in L(U)$，使得 $M(\sigma)=A$；

(2) 加法：任意 $\sigma,\tau\in L(U)$，都有 $M(\sigma+\tau)=M(\sigma)+M(\tau)$；

(3) 数乘：任意 $k\in F,\sigma\in L(U)$，都有 $M(k\sigma)=kM(\sigma)$；

(4) 乘法：任意 $\sigma,\tau\in L(U)$，都有 $M(\sigma\circ\tau)=M(\sigma)M(\tau)$；

(5) 作为 *(4)* 的推论，σ 可逆 $\iff$ $M(\sigma)$ 可逆，并且 $M(\sigma^{-1})=(M(\sigma))^{-1}$

以上 *(1)(2)(3)* 说明 $M:L(U)\to M_n(F)$ 是线性空间之间的**同构**。结合 *(4)(5)* 说明 M 是 F-代数同构，这比线性空间的同构更强。

例 102 在 F^3 中，线性变换 $T:(x_1,x_2,x_3)\to(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$ 在基 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 下的矩阵为_____。

例 103 定义 $M_2(F)$ 上的线性变换 σ 如下：

$$\sigma(A)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

则 σ 在 $M_2(F)$ 的自然基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为_____。

20 线性变换在不同基下的矩阵

定义.（不同基之间的过渡矩阵）设 U 是 F 上的 n 维线性空间，$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},T=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是 U 的两组基，用 S 线性表出 T 如下

$$\beta_1=p_{11}\alpha_1+\cdots+p_{n1}\alpha_n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n=p_{1n}\alpha_1+\cdots+p_{nn}\alpha_n$$

形式上可以记作 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，这里的矩阵 $P=(p_{ij})$ 被称为从 S 到 T 的过渡矩阵。

注记. 这里的顺序不能颠倒！从 S 到 T 的过渡矩阵是 P，可以粗略地理解为 S 通过右乘 P 得到 T。

定理 20.1 （过渡矩阵）以上定义地从 S 到 T 的过渡矩阵是唯一的，并且是可逆的，此外从 T 到 S 的过渡矩阵是 P^{-1}。

定理 20.2 （过渡矩阵和向量坐标的关系）设 U 是 F 上的 n 维线性空间，$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},T=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是 U 的两组基，P 是从 S 到 T 的过渡矩阵。对于向量 $\alpha\in U$，如果 α 在 S 下的坐标为 $X=(x_i)$，在 T 下的坐标为 $Y=(y_j)$，则我们有 $X=PY$。

注记. 一定要区分一个向量和它的坐标！在这个定理中，一个向量在不同基下对应于不同的坐标，它们的关系是

$$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y$$

下面的例子（非数组向量）有助于理解。

例 104 在 $F[x]_3$ 中，$S=\{1,x,x^2\},T=\{1,x-1,(x-1)^2\}$ 是两组基，向量 $\alpha=1+x+2x^2$

(1) $(1,x-1,(x-1)^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是从 S 到 T 的过渡矩阵；

(2) α 在两组基下的坐标为 $X=(1,1,2)^T$ 和 $Y=(4,5,2)^T$，这可以通过配方或者求导计算出来，所以有

$$1+x+2x^2=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=(1,x-1,(x-1)^2)\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$$

(3) 不难验证 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$，此即 $X=PY$。

例 105 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换。已知 $\sigma((2,-2,1)^T)=(4,-2,2)^T,\sigma((1,1,-2)^T)=(5,-7,2)^T$

(1) 求 $\sigma((-1,3,-3)^T)$；

(2) 若 $\sigma((1,1,1)^T)=(15,-9,6)^T$，求 σ 在基 $(2,-2,1)^T,(1,1,-2)^T,(1,1,1)^T$ 下的矩阵 A，并判断 σ 是否可逆。

定理 20.3 (线性变换在不同基下矩阵的关系)设 U 是 F 上的 n 维线性空间,$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},T=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是 U 的两组基，P 是从 S 到 T 的过渡矩阵。若 U 上线性变换 σ 在 S 和 T 下的矩阵分别为 A 和 B，则我们有 $B=P^{-1}AP$。

注记. 从形式上可以这样理解：

$$\begin{aligned}(\beta_1,\cdots,\beta_n)B&=\sigma(\beta_1,\cdots,\beta_n)\\&=\sigma((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P)=\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P\\&=(\alpha_1,\cdot,\alpha_n)AP=(\beta_1,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP\end{aligned}$$

定义.（矩阵的相似）设 $A, B \in M_n(F)$ 如果存在可逆矩阵 $P \in M_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$，则称 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$。

利用矩阵的运算和性质，可以证明相似矩阵具有以下性质

定理 20.4 （相似矩阵的性质）设 $A, B \in M_n(F), A \sim B$，则有

(1) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$;

(2) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

(3) $|A| = |B|$;

(4) 若 A 可逆，则 B 也可逆，而且有 $A^{-1} \sim B^{-1}$;

(5) 设 $f(x) \in F[x]$，则有 $f(A) \sim f(B)$。

例 106 设 $A \in M_n(F)$，且 A 可逆，则下列结论正确的是_____。

(A) A 与 B 相似；

(B) A 与 B 等价；

(C) AB 与 BA 相似且等价；

(D) AB 与 BA 等价却不一定相似

例 107 从下列矩阵中，选出与 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 相似的矩阵_____。

(A) $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 3 & & \end{pmatrix}$;

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

21 像与核

定义.（像与核）设 σ 是 U 上的线性变换

(1) 定义 $\operatorname{Im} \sigma = \{\sigma(\alpha) \in U | \alpha \in U\}$;

(2) 定义 $\operatorname{Ker} \sigma = \{\alpha \in U | \sigma(\alpha) = 0\}$。

容易验证以下性质

定理 21.1 （像与核都是子空间）对于 U 上的线性变换 σ，$\operatorname{Ker} \sigma, \operatorname{Im} \sigma$ 都是 U 的子空间。

正是因为这一点，我们可以谈论它们的维数，并且利用线性相关性的理论来研究像与核。

定理 21.2 （像与核的维数公式）设 σ 是 U 上的线性变换，则有

$$\dim U = \dim \operatorname{Im} \sigma + \dim \operatorname{Ker} \sigma$$

定义.（线性变换的秩）我们定义 U 上线性变换 σ 的秩 $\operatorname{rank}\sigma = \dim \operatorname{Im}\sigma$。以上维数关系可以写成 $\dim U = \operatorname{rank}\sigma + \dim \operatorname{Ker}\sigma$。

通过以下定理，我们能更好地理解线性变换和矩阵的对应关系。

定理 21.3 （线性变换和矩阵的秩）设 σ 是 U 上的线性变换，A 是 σ 在某组基下的矩阵，则我们有

(1) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\sigma$;

(2) $\dim V_A = \dim \operatorname{Ker}\sigma$。

注记. 以上关系 $\dim V_A = \dim \operatorname{Ker}\sigma$ 并不表示 $V_A = \operatorname{Ker}\sigma$！它们实际上处于两个截然不同的空间之中，只是因为维数相同而线性同构。

定理 21.4 （单射与满射等价）设 σ 是**有限维**线性空间 U 上的线性变换，则以下几条等价

(1) σ 是可逆线性变换；

(2) $\operatorname{Ker}\sigma = \{0\}$，即 σ 是单射；

(3) $\operatorname{Im}\sigma = U$，即 σ 是满射。

例 108 定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换如下：

$$\sigma(X) = AX - XA, \forall X \in M_2(\mathbb{R}),\ \text{其中}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

分别求 $\operatorname{Im}\sigma$ 和 $\operatorname{Ker}\sigma$ 的维数和一组基。

例 109 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，$\operatorname{rank}\sigma = n-1$，并且存在 $k \in \mathbb{N}_*$，使得 $\sigma^k = 0$。证明：存在 $\alpha \in V$，使得

$$V = L\{\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{n-1}(\alpha)\}$$

例 110 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换。证明以下几条等价：

(1) $V = \operatorname{Ker}\sigma \oplus \operatorname{Im}\sigma$；

(2) $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Ker}\sigma^2$；

(3) $\operatorname{Im}\sigma = \operatorname{Im}\sigma^2$。

例 111 设 V 是 n 维线性空间，σ, τ 是 V 上的线性变换，并且 $\sigma\tau = \sigma$，证明 $\operatorname{Ker}\sigma \cap \operatorname{Im}\tau = \{0\} \iff \operatorname{rank}\sigma = \operatorname{rank}\tau$。

22 特征值与特征向量

一个矩阵能否相似对角化是非常重要的问题，我们正是以此为动机提出特征值和特征向量的概念。

定义.（特征值和特征向量）

(1) 设 $\sigma \in L(U)$ 是 U 上的线性变换，如果存在 $\lambda \in F, \alpha \neq 0 \in U$，使得

$$\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$$

则称 λ 是 σ 的一个特征值，并称 α 是属于 λ 的一个特征向量；

(2) 设 $A \in M_n(F)$ 是 F 上的 n 阶方阵，如果存在 $\lambda \in F, X \neq 0 \in F^n$，使得

$$AX = \lambda X$$

则称 λ 是 A 的一个特征值，并称 X 是属于 λ 的一个特征向量。

出于方便，以下这些性质均以矩阵为例进行叙述，这些结论对于线性变换往往也是成立的。

定理 22.1 （特征值和特征向量的初步性质）设 $A \in M_n(F)$

(1) 设 λ 是 A 的特征值，$X_1 \neq X_2$ 是属于 λ 的特征向量，则

- $X_1 - X_2$ 是属于 λ 的特征向量；
- 任意 $k \neq 0 \in F$，都有 kX_1 是属于 λ 的特征向量

(2) 由 *(1)* 可知，$V_\lambda = \{X \in F^n | X$ 是 A 的特征向量 $\} \cup \{0\}$ 是 F^n 的一个子空间，称为属于 λ 的特征子空间；

(3) 设 $f(x) \in F[x], \lambda$ 是 A 的特征值，X 是属于 λ 的特征向量，则

- $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值；
- X 是 $f(A)$ 的属于 $f(\lambda)$ 的特征向量

注记. 以上定理的 *(3)* 反过来并不成立，即 $f(\lambda)$ 是 A 的特征值 $\nRightarrow \lambda$ 是 A 的特征值；X 是 $f(A$ 的特征向量 $\nRightarrow X$ 是 A 的特征向量，因此它们往往具有不同的特征子空间。

例 112 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵，则下列说法与“A 可逆”等价的为_____。

(1) A 的列向量组线性无关；

(2) $\text{Ker } A = \{0\}$；

(3) $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$；

(4) $\text{rank } A = n$；

(5) $|A| \neq 0$；

(6) 0 不是 A 的特征值。

例 113 设 U 是 $\mathbb{R}$ 上的 3 维线性空间，σ 是 U 上的线性变换，则下列关于 σ 的特征值和特征向量的说法，错误的是_____

(A) σ 可能没有特征值；

(B) 如果 α 是 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $k\alpha, k \neq 0 \in \mathbb{R}$ 也是 σ 的属于 λ_0 的特征向量；

(C) 设 λ_1, λ_2 是 σ 的两个不同的特征值，α_1, α_2 分别为属于 λ_1, λ_2 的特征向量，则 $\alpha_1 + \alpha_2$ 一定不是 σ 的特征向量；

(D) 如果 λ_0 是 σ 的特征值，$f(x) \in \mathbb{R}[x]$，则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(\sigma)$ 的特征值。

例 114 证明

(1) 若 α, β 分别是属于特征值 λ, μ 的特征向量，且 $\lambda \neq \mu$，则 $\alpha + \beta$ 不是特征向量；

(2) 若线性空间 V 上的线性变换 σ 以所有非零向量为特征向量，则 σ 必是 V 上的数乘变换。

例 115 设 $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ b & 1 & -2 \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个特征值 $0, 1, -2$，则 $a =$_____，$b =$_____，$c =$_____。

例 116 设 $A \in M_3(F)$，且 A 为对称矩阵，特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$。若 A 的一个属于 -1 的特征向量为 $\alpha = (0, 1, 1)^T$，则 $A =$_____。

例 117 设 σ 为 n 维线性空间 U 上的线性变换，满足 $\sigma^2 = \sigma$。证明

(1) σ 的特征值只可能为 $0, 1$;

(2) 记 V_0, V_1 分别为特征值 $0, 1$ 的特征子空间，则

$$\dim V_0 + \dim V_1 = n$$

(3) σ 在 U 的某组基下的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$。

定理 22.2 （特征向量和可对角化）

(1) 设 $\sigma \in L(U)$，其中 U 是 F 上的 n 维线性空间，则 σ 可对角化 $\iff$ σ 有 n 个线性无关的特征向量；

(2) 设 $A \in M_n(F)$，则 A 可对角化 $\iff$ A 有 n 个线性无关的特征向量。

定义.（特征多项式）设 $A \in M_n(F)$，称 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式，为了区分，有时也记作 $f_A(\lambda)$。

定理 22.3 （特征多项式的性质）设 $A \in M_n(F)$，$f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式。

(1) λ_0 是 $f_A(\lambda)$ 的根 $\iff$ λ_0 是 A 的特征值；

(2) 由 *(1)* 可知，做分解 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$，则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值；

(3) 由 *(2)* 结合 Vieta 定理可知

- $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$；
- $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

(4) 若 $A \sim B$ 则 $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$。

例 118 设 $A \in M_n(\mathbb{C}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$，并且 $\beta^T A\alpha \neq 0$。设 $B = A\alpha\beta^T \in M_n(\mathbb{C})$，证明矩阵 B 可对角化。

23 特征子空间与对角化，不变子空间与准对角化

定义.（特征子空间）

(1) 设 $A \in M_n(F)$，$\lambda \in F$ 是 A 的特征值，则 $V_\lambda = \{X \in F^n | AX = \lambda X\} = V_{A-\lambda I}$ 称为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间；

(2) 设 U 是数域 F 上的线性空间，$\sigma \in L(U)$，λ 是 σ 的特征值，则 $V_\lambda = \{\alpha \in U | \sigma(\alpha) = \lambda\alpha\} = \operatorname{Ker}(\sigma - \lambda I)$ 称为 σ 的属于 λ 的特征子空间。

例 119 给定方阵 A，下列关于 A 的那些性质在相似变换下保持不变_____。

(1) 特征多项式；

(2) 特征子空间；

(3) 最小多项式；

(4) 像空间；

(5) 核空间。

下面的定理是进行子空间分解的依据。

定理 23.1 （特征子空间的直和）设 U 是数域 F 上的线性空间，$\sigma \in L(U)$，则对于 σ 属于不同特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i}，它们的和为直和。

以下定义代数重数与几何重数，并且给出矩阵可对角化的一个等价条件。

定义.（代数重数与几何重数）设 $A \in M_n(F)$，它的特征多项式为 $f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda - \lambda_t)^{n_t}$，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t \in \mathbb{C}$ 是 A 的全部不同的特征值

(1) 称 n_i 为特征值 λ_i 的代数重数；

(2) 称 $m_i = \dim V_{\lambda_i}$ 为特征值 λ_i 的几何重数。

定理 23.2 （几何重数与代数重数）

(1) 几何重数不超过代数重数，即 $1 \leqslant m_i \leqslant n_i, 1 \leqslant i \leqslant t$；

(2) 矩阵 A 可对角化 $\iff m_1 + \cdots + m_t = n \iff m_i = n_i, 1 \leqslant i \leqslant t$；

(3) 作为 *(2)* 的推论，如果 A 的所有特征值都是单根，则 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化。

例 120（判断）设 $A \in M_n(F)$，则 A 可对角化当且仅当 A 的特征多项式在 F 中有 n 个根（计重数）。

例 121 设 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c & & & a \end{pmatrix} \in M_n(F)$，求 A 可对角化的充要条件。

引入不变子空间的概念，它比特征子空间更加广泛，并且可以给出矩阵可准对角化的条件。

定义.（不变子空间）设 U 是数域 F 上的线性空间，$\sigma \in L(U)$。若 V 是 U 的子空间，并且满足 $\sigma(V) \subseteq V$，则称 V 是一个 σ 的不变子空间。

定理 23.3 （可交换的线性变换与不变子空间）设 U 是数域 F 上的线性空间，$\sigma, \tau \in L(U)$。若 $\sigma\tau = \tau\sigma$，则 $\operatorname{Im}\tau, \operatorname{Ker}\tau$ 都是 σ 的不变子空间；$\operatorname{Im}\sigma, \operatorname{Ker}\sigma$ 都是 τ 的不变子空间。

如果 $U = V \oplus W$，其中 V, W 是 σ 的不变子空间，则 σ 在某组基下的矩阵是准对角阵。进行推广就能得到

定理 23.4 （准对角化的条件）设 U 是数域 F 上的线性空间，$\sigma \in L(U)$，则 σ 在某组基下的矩阵为准对角阵 $\iff$ U 可以分解成一些 σ 的不变子空间的直和。

例 122 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，σ, τ 是 V 上的线性变换，$\sigma\tau = \tau\sigma$，并且 σ 可对角化。证明存在 V 的一组基，使得 σ, τ 在这组基下的矩阵均为准对角矩阵。

24 零化多项式与最小多项式

定义.（零化多项式与最小多项式）

(1) 设 $A \in M_n(F)$，如果 $f(x) \neq 0 \in F[x]$ 满足 $f(A) = 0$，则称 $f(x)$ 是 A 的一个零化多项式。我们称 A 所有零化多项式中次数最低的**首一**多项式为 A 的最小多项式。

(2) 设 U 是数域 F 上的线性空间，$\sigma \in L(U)$，如果 $f(x) \neq 0 \in F[x]$ 满足 $f(\sigma) = 0$，则称 $f(x)$ 是 σ 的一个零化多项式。我们称 σ 所有零化多项式中次数最低的**首一**多项式为 σ 的最小多项式。

定理 24.1 （零化多项式与最小多项式）

(1)（存在性）任意 $A \in M_n(F)$ 都存在零化多项式；

(2)（Hamilton-Caley）对于任意 $A \in M_n(F)$，它的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 是一个零化多项式；

(3)（最小多项式是零化多项式的因式）设 $A \in M_n(F)$，$f(x)$ 是它的一个零化多项式，$d(x)$ 是它的一个最小多项式，则 $d(x) \mid f(x)$；

(4)（最小多项式的唯一性）由 *(3)* 可知，最小多项式存在且唯一；

(5)（和矩阵相似的关系）相似的矩阵具有相同的零化多项式，因此具有相同的最小多项式；

(6)（与特征值的关系 I）设 $A \in M_n(F)$，$f(x)$ 是它的一个**零化**多项式，则 A 的任意特征值都是 $f(x)$ 的根；

(7)（与特征值的关系 II）设 $A \in M_n(F)$，$d(x)$ 是它的**最小**多项式，则 $d(x)$ 的任意根都是 A 的特征值。

例 123（判断）如果矩阵 $A, B \in M_n(F)$ 有相同的特征多项式、最小多项式，则它们相似。

定理 24.2 （最小多项式与可对角化）设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，则 A 可对角化 $\iff$ A 的最小多项式没有重根。

例 124 下列说法错误的是_____。

(A) 如果 $A \in M_4(\mathbb{R})$ 满足 $A^3 - A^2 - 4A + 4I = 0$，则 A 在 $\mathbb{R}$ 上一定可对角化；

(B) 如果 $B \in M_n(F)$ 满足 $B^5 = 0$，则 B 只有一个特征值 0；

(C) 属于 F 上的矩阵的最小多项式和特征多项式在 F 中有相同的根；

(D) 有相同特征多项式和最小多项式的两个矩阵一定相似。

例 125 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 的最小多项式为_____。

例 126 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，证明

(1) A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 是 A 的任一个零化多项式 $\varphi(\lambda)$ 的因式；

(2) 若 λ_0 是 A 的特征值，则 $d(\lambda_0) = 0$.

例 127 设 $A \in M_n(F)$，证明

(1) A 是幂零矩阵，即存在 $k \in \mathbb{N}_*$，使得 $A^k = 0 \iff A$ 的特征值都为 0；

(2) 若 $\operatorname{rank} A = 1$，则 A 是幂零矩阵 $\iff$ $\operatorname{tr} A = 0$；

现在我们可以给出判断一个矩阵在 $\mathbb{C}$ 上可对角化的种种条件。需要注意，即使一个矩阵在 $\mathbb{C}$ 上可对角化，在更小的数域 F 上也不一定可以对角化。

定理 24.3 （$\mathbb{C}$ 上可对角化的条件）设矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$，则 A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化有如下

➢ **充分必要条件**

(1) 存在 n 个线性无关的特征向量；

(2) 所有特征子空间的直和为 $\mathbb{C}^n$；

(3) 所有特征子空间的维数之和为 n；

(4) 所有特征值的代数重数都等于几何重数；

(5) A 的最小多项式 $d(x)$ 没有重根。

➢ **充分条件**

(1) 所有特征值的代数重数都为 1;

(2) 如果矩阵 A 可对角化，$f(x) \in F[x]$，则 $f(A)$ 也可对角化。

注记. 设 $A \in M_n(F)$，则 A 在数域 F 上可对角化意味着：

(1) A 的全部特征值都在 F 中，或者说特征多项式 $f_A(\lambda)$ 可以在 F 上分解为 1 次因式的乘积；

(2) A 满足以上在 $\mathbb{C}$ 上可对角化的任一条件，即作为 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是可对角化的。

例 128 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 可相似对角化，求 b。

例 129 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 可对角化，$f(x) \in \mathbb{C}[x]$，证明 $B = \begin{pmatrix} A & f(A) \\ f(A) & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$ 也可对角化。

例 130 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，试证明以下结论

(1) 若 $A \in M_n(F)$ 满足 $A^2 = A$，则 $\operatorname{tr} A = \operatorname{rank} A$;

(2) 设 σ 是 V 上的线性变换，满足 $\sigma^m = \mathrm{id}_V$，证明 σ 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化；

(3) 对于 (2) 中的 σ，设 V_1 为特征值 1 的特征子空间，并且定义 V 上的线性变换 $\tau = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\sigma^i$，则有

$$\operatorname{tr}\tau = \dim V_1。$$

例 131 设 $A \in M_n(F)$，A 可对角化。定义 $M_n(F)$ 上的线性变换 $\sigma : X \to AXA^T$。证明 σ 可对角化。

例 132 设 $A \in M_n(F)$，A 可对角化。定义 $M_n(F)$ 上的线性变换 $\sigma : X \to AX^TA^T$。证明 σ 可对角化。

25 Jordan 形简介

定理 25.1 （相似上三角化）设矩阵 $A \in M_n(F)$，则 A 在 $\mathbb{C}$ 上相似于一个上三角形矩阵。

作为更强的结论，任何矩阵都在 $\mathbb{C}$ 上相似于一个 Jordan 形矩阵。我们并不打算给出这一结论的证明，而是打算给出一些例子，这能帮助大家理解可对角化矩阵的性质，也有助于构造反例。

定义.（Jordan 块和 Jordan 形矩阵）

(1) 设 $a \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}_*$，则矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{C})$ 被称为一个 m 阶 Jordan 块，记作 $J_m(a)$;

(2) 形如 $\begin{pmatrix} J_{m_1}(a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(a_k) \end{pmatrix}$，其中 $a_i \in \mathbb{C}, m_i \in \mathbb{N}_*, 1 \leqslant i \leqslant k$ 的矩阵被称为 Jordan 形矩阵。

例 133 以下矩阵都是 Jordan 形矩阵

(1) 任意对角形矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$；

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$；

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$。

定理 25.2 （Jordan 形的主定理）设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，则 A 一定相似于一个 Jordan 形矩阵 J，并且矩阵 J 的各个 Jordan 块在不计顺序的意义下是唯一的。

注记. 这一定理的结论可以记住，但是因为课本并没有给出证明，在考试的解答题中不能使用它！

例 134 证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 不相似。

例 135 证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 和矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 相似。

例 136 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换，$(\sigma - \mathrm{id}_V)^n = 0, (\sigma - \mathrm{id}_V)^{n-1} \neq 0$。证明存在 V 的一组基，使得 σ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$。

例 137 对 $a \neq 0$ 证明

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & a & & & \\ & a & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & a \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

26 二次型及其矩阵

在本节中，数域总设为 F。

定义.（n 元二次型及其矩阵）

(1) 称 F 上的 n 元二次多项式 $f=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$ 为 F 上的一个 n 元二次型。如果 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，则称它为一个实二次型或复二次型；

(2) 对于 $i>j$，令 $a_{ij}=a_{ji}$，由此得到一个**对称矩阵**$A=(a_{ij})$，如果令 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$，则有 $f=X^TAX$。称 A 为二次型 f 的矩阵，A 的秩为二次型 f 的秩。

注记. 不难发现，F 上的 n 元二次型和 n 阶对称矩阵形成一一对应。

例 138 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵为_____。

例 139 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则 $c=$_____。

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4

27 二次型的标准形与规范形

定义.（**可逆**线性替换）设 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T,Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$。如果**可逆**矩阵 $C\in M_n(F)$ 满足 $X=CY$，则称 C 是从变元 $x_1,\cdots,x_n$ 到变元 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个可逆线性替换。

注意到 $f=X^TAX=(CY)^TAY=Y^TC^TACY$，如果将 f 视为关于 Y 的二次型，那么 f 的矩阵变为 C^TAC。这启发我们定义矩阵的相合关系。

定义.（矩阵的相合）设 $A,B\in M_n(F)$，如果存在可逆矩阵 $C\in M_n(F)$ 使得 $B=C^TAC$，则称 A 与 B 相合，记作 $A\simeq B$。

例 140 设 A,B 是 n 阶实对称方阵，以下 4 个断言正确的个数是_____。

(1) 若 A 与 B 相合，则 A 与 B 相似；

(2) 若 A 与 B 相抵，则 A 与 B 相合；

(3) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 相合；

(4) 若 A 与 B 相似，则 A 与 B 相抵；

(A) 1 个； (B) 2 个； (C) 3 个； (D) 4 个

定理 27.1 (二次型的可逆线性替换和矩阵相合的关系) 数域 F 上的二次型 f 可以通过可逆线性替换化为二次型 g 当且仅当 f 的矩阵 A 和 g 的矩阵 B 相合。

定义.（二次型的标准形）称只含平方项的二次型 $\sum_{i=1}^{n}d_ix_i^2$ 为标准二次型。如果二次型 f 通过可逆线性替换变为标准二次型 $g=\sum_{i=1}^{n}d_ix_i^2$，则称 g 为 f 的一个标准形。

定理 27.2 (标准形的存在性) 数域 F 上的任意一个二次型 f 都可以通过可逆线性替换化为标准形。

例 141 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 的标准形为_____，规范形为_____。

例 142 求二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \max\{i, j\} x_i x_j$ 的标准形。

定理 27.3 ($\mathbb{C}$ 上的规范形) 任意一个复 n 元二次型 f 可以通过 $\mathbb{C}$ 上的可逆线性替换化为 $z_1^2 + \cdots + z_r^2$ 的形式，这称为 f 在 $\mathbb{C}$ 上的规范形，其中 r 为 f 的秩。

注记. 上述 $\mathbb{C}$ 上的规范形是唯一的，并且完全由二次型的秩决定。

定理 27.4 ($\mathbb{R}$ 上的规范形) *(1)* 任意一个实二次型 f 可以通过 $\mathbb{R}$ 上的可逆线性替换化为 $z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$ 的形式，这称为 f 在 $\mathbb{R}$ 上的规范形，其中 r 为 f 的秩；

(2) 一个实二次型的在 $\mathbb{R}$ 上的规范形是唯一的。

例 143 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在实数域上的规范形为_____。

定义.（惯性指数）

(1) 称实二次型 f 的规范形中正平方项的个数 p 为 f 的正惯性指数，负平方项的个数 $q = r - p$ 为 f 的负惯性指数，$p - q = 2p - r$ 为 f 的符号差;

(2) 设 A 是实对称矩阵，称二次型 $f = X^T AX$ 的正惯性指数、负惯性指数、符号差为矩阵 A 的正惯性指数、负惯性指数、符号差。

定理 27.5 (实对称矩阵的相合标准形)

(1) 设 A 是实对称矩阵，则 A 和矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 相合，其中 $p, r-p$ 分别是 A 的正、负惯性指数；

(2) 作为 *(1)* 的推论，两个 n 阶实对称矩阵相合当且仅当它们有相同的秩和正惯性指数；

(3) 作为 *(2)* 的推论，n 阶实对称矩阵按照相合的等价关系可以划分为 $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类。

例 144 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则下列矩阵中与 A 在实数域上相合的是_____，在复数域上相合的是_____。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； *(2)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； *(3)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$； *(4)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

例 145 将所有 4 阶实对称矩阵按实数域范围内的相合关系分类，彼此相合的矩阵属于同一类，不相合的矩阵属于不同类，则一共有_____ 类。

(A) 4； (B) 5； (C) 10； (D) 15

例 146 设 A 为实 n 阶非奇异矩阵，若 A 与 $-A$ 在实数域上相合，则 n 的奇偶性为_____。

例 147 对于实对称矩阵 A，记 $p(A), q(A)$ 为它的正、负惯性指数。设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，证明

$$p\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = p(A) + p(B),\ q\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = q(A) + q(B)$$

例 148 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，证明

$$p(A) + p(B) \geqslant p(A+B),\ q(A) + q(B) \geqslant q(A+B)$$

28 正定/半正定/负定/半负定/不定二次型及其矩阵

从本节开始，如果不特别说明，数域总设为 $\mathbb{R}$。

定义.（正定/半正定/负定/半负定/不定二次型及其矩阵）设 $f(X) = X^TAX$ 为 n 元**实二次型**，A 为**实对称矩阵**

(1) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(X) > 0$，则称 f 为正定二次型，称 A 为正定矩阵，记作 $A > 0$；

(2) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(X) \geqslant 0$，则称 f 为半正定二次型，称 A 为半正定矩阵，记作 $A \geqslant 0$；

(3) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(X) < 0$，则称 f 为负定二次型，称 A 为负定矩阵，记作 $A < 0$；

(4) 如果对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(X) \leqslant 0$，则称 f 为半负定二次型，称 A 为半负定矩阵，记作 $A \leqslant 0$；

(5) 如果 f 不是半正定也不是半负定二次型，则称 f 为不定二次型，称 A 为不定矩阵。

定理 28.1 (正定性与负定性，半正定性与半负定性) 设 A 是实对称矩阵，

(1) A 是正定矩阵当且仅当 $-A$ 是负定矩阵；

(2) A 是半正定矩阵当且仅当 $-A$ 是半负定矩阵。

注记. 这条性质说明只需要研究正定和半正定矩阵即可。

定理 28.2 (正定矩阵的等价条件) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，则 A 是正定矩阵当且仅当

(1) 对于任意 $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$，都有 $X^TAX > 0$；

(2) A 与单位矩阵 I 相合；

(3) A 的正惯性指数为 n；

(4) 存在可逆矩阵 $C \in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A = C^TC$；

(5) A 的所有顺序主子式都大于 0。

定理 28.3 (正定矩阵的简单性质) 设 A, B 是 n 阶正定矩阵,

(1) $A^{-1}, A^{*}, A^{k}, k \in \mathbb{N}_{*}$ 都是正定矩阵。

(2) $A + B$ 是正定矩阵。

例 149 设 A, B 是正定矩阵,则下列说法正确的是_____。

(A) $A+B, AB$ 都是正定矩阵;

(B) AB 是正定矩阵,$A+B$ 不是正定矩阵;

(C) $A+B$ 是正定矩阵,AB 不一定是正定矩阵;

(D) $A+B$ 是正定矩阵,AB 不是正定矩阵

注记. 注意,正定矩阵的乘积往往不是正定矩阵,它甚至往往不是实对称矩阵。

例 150 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 是半正定的,k_0 为正实数。证明:$k_0 I + A$ 是正定的。

例 151 设 $A \in M_n(F)$ 且 $\operatorname{rank} A = n$。证明:$A^T A$ 是正定矩阵。

例 152 设 A 是实反对称矩阵,试证:$I - A^2$ 是正定矩阵。

例 153 已知 $\begin{pmatrix} 5 & x & \\ 2-x & x+y & \\ & & x-y^2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$ 是正定矩阵,则 y 的取值范围是_____。

(A) $-\dfrac{4}{5} < y < 1$;　(B) $-\sqrt{|x|} < y < \sqrt{|x|}$;　(C) $y < -1$;　(D) $-1 < y < 1$

例 154 n 元实二次型 $Q(X) = X^T A X$ 负定的充要条件是_____。

(A) $|A| < 0$;

(B) 任给 n 维非零实向量 X,都有 $X^T A X < 0$;

(C) A 的各阶顺序主子式均为负数;

(D) $Q(X)$ 的正惯性指数 $p = 0$

例 155 已知 A 为 n 阶实对称矩阵,则下列论断能保证 A 为正定矩阵的有_____。

(1) A 能表示为一个正定矩阵的平方;

(2) A 的正惯性指数等于 A 的秩;

(3) A 的特征值均大于 0;

(4) A 与单位矩阵相合

(A) 1 个；　(B) 2 个；　(C) 3 个；　(D) 4 个

例 156 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明实二次型 $f(X)=\begin{vmatrix} A & X \\ X^T & 0 \end{vmatrix}$ 是负定二次型。

下面几个问题需要使用 $\mathbb{R}^n$ 中的 **Cauchy-Schwarz 不等式**。

例 157 设 A 是 n 阶正定矩阵，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，证明：$\alpha^T\beta\leqslant(\alpha^TA\alpha)(\beta^TA^{-1}\beta)$，等号成立当且仅当 $A\alpha$ 与 β 成比例。

例 158 设 A 是 n 阶正定矩阵，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha^T\beta>0$，证明：$B=A-\dfrac{A\beta\beta^TA}{\beta^TA\beta}+\dfrac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\beta}$ 是正定矩阵。

例 159 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha^T\beta>0$，

(1) 证明 $A=I-\dfrac{\beta\beta^T}{\beta^T\beta}+\dfrac{\alpha\alpha^T}{\alpha^T\beta}$ 是正定矩阵；

(2) 证明 $\alpha=A\beta$。

定理 28.4 (半正定矩阵的等价条件) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，则 A 是半正定矩阵当且仅当

(1) 对于任意 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$，都有 $X^TAX\geqslant 0$;

(2) A 与矩阵 $\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ 相合，其中 $d_1,\cdots,d_n\geqslant 0$;

(3) A 的负惯性指数为 0;

(4) 存在矩阵 $C\in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A=C^TC$;

(5) A 的所有主子式都大于等于 0。

例 160 设 $f(X)=X^TAX$ 是实数域上的半正定 n 元二次型，下列论断中正确的是_____。

(1) f 的正惯性指数是 n;

(2) f 的标准形中，所有平方项的系数都大于等于 0;

(3) A 的所有顺序主子式都大于等于 0;

(4) A 的所有特征值都大于等于 0

(A) *(2)(3)(4)*；　(B) *(1)(2)(3)(4)*；　(C) *(2)(4)*；　(D) *(2)*

例 161（很实用！）设 A 是 n 阶半正定矩阵，$\alpha\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha^TA\alpha=0$，证明 $A\alpha=0$。

例 162 设 A 是 n 阶半正定矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，证明：

(1) 对于 $X\in\mathbb{R}^n$，$(A+B)X=0$ 当且仅当 $AX=BX=0$;

(2) $\mathrm{rank}(A+B)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$。

例 163 设 A 是 n 阶实对称矩阵，B 为 n 阶半正定矩阵，并且 $|A+iB|=0$。证明：存在 $\alpha\neq 0\in\mathbb{R}^n$，使得 $A\alpha=B\alpha=0$。

例 164 设 A 是 n 阶半正定矩阵，将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 $A_{11}\in M_r(\mathbb{R}), A_{22}\in M_{n-r}(\mathbb{R})$。证明

(1) A_{11}, A_{22} 也是半正定矩阵；

(2) $\operatorname{rank} A_{11}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$，因此存在矩阵 $B\in M_{r\times(n-r)}$，使得 $A_{11}B=A_{12}$；

(3) 如果 $A_{11}=O$，那么 $A_{12}=O$。

例 165 设 A,B 是 n 阶半正定矩阵，证明：AB 可对角化。

例 166 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A^2=A$，证明：如果对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 都有 $\alpha^T A^T A\alpha\leqslant\alpha^T\alpha$，那么 $A=A^TA$。

29 内积与欧氏空间

定义.（内积与欧氏空间）设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间，如果映射 $(\bullet,\bullet): V\times V\to\mathbb{R}$ 满足以下性质

(1) 对称性：任意 $\alpha,\beta\in V$，都有 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

(2) 线性性：任意 $k_1,k_2\in\mathbb{R},\alpha,\beta,\gamma\in V$，都有 $(k_1\alpha+k_2\beta,\gamma)=k_1(\alpha,\gamma)+k_2(\beta,\gamma)$；

(3) 正定性：任意 $\alpha\in V$，都有 $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，并且 $(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$

则称 $(\bullet,\bullet)$ 是 V 上的一个内积，称 $(V,(\bullet,\bullet))$ 是一个欧氏空间。

定理 29.1 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 V 是欧氏空间，则对于任意 $\alpha,\beta\in V$，都有 $|(\alpha,\beta)|^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$，等号成立当且仅当 α,β 线性相关。

定义.（长度和夹角）

(1) 设 $\alpha\in V$，称 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为 α 的长度，记作 $|\alpha|$；

(2) 设 $\alpha,\beta\in V$，称 $\theta=\arccos\dfrac{(\alpha,b)}{|\alpha||\beta|}\in[0,\pi]$ 为 α,β 的夹角。

例 167 设 V 是欧氏空间，$v_1,v_2,v_3\in V$。已知 $|v_1|=1,|v_2|=2,|v_3|=3,(v_1,v_2)=0,(v_2,v_3)=6$，则向量组 v_1,v_2,v_3 的秩是_____。

例 168 在标准内积欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中，向量 $\alpha=(1,2,2,3)$ 与向量 $\beta=(3,1,5,1)$ 的夹角为_____。

定义.（单位向量，向量的正交）

(1) 设 $\alpha\in V$，如果 $|\alpha|=1$，则称 α 为单位向量；

(2) 设 $\alpha,\beta\in V$，如果 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α,β 相互正交，记作 $\alpha\perp\beta$。

例 169 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义内积 $\forall\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$：

$$(\alpha,\beta)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$$

则以下向量中与向量 $(1,2,3)$ 正交的是_____。

(A) $(1,2,-1)$；

(B) $(0,1,0)$；

(C) $(1,1,-1)$；

(D) $(1,-1,0)$

定理 29.2 (勾股定理) 设 $\alpha,\beta\in V$ 满足 $\alpha\perp\beta$，则 $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$。

例 170 设 α,β 为 n 维实正交向量，则下列说法错误的是_____。

(A) $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$；

(B) $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$；

(C) $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$；

(D) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

例 171 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_0,\cdots,\alpha_n\in V$ 满足任意两个元素之间的距离为 $d>0$。令 $\beta_i=\alpha_i-\alpha_0,1\leqslant i\leqslant n$，证明：

(1) $(\beta_i,\beta_j)=\dfrac{d^2}{2},1\leqslant i<j\leqslant n$；

(2) $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是 V 的一组基。

如何在一个 n 维线性空间上定义内积？或者说 n 维线性空间上的内积取决于什么？为了回答这些问题，我们需要给出度量矩阵的概念。

定义.（度量矩阵）设 $(V,(\bullet,\bullet))$ 是一个欧氏空间，$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是一组基。记 $a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$，并且令 $A=(a_{ij})$，这称为 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 关于内积 $(\bullet,\bullet)$ 的度量矩阵。

例 172 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，定义 $\mathbb{R}^3$ 上的内积：$(X,Y)=X^TAY$。求此内积在 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$ 下的度量矩阵。

对于任意 $\alpha,\beta\in V$，设 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X,\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y$，其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T,Y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$，那么有

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^n(x_i\varepsilon_i,y_j\varepsilon_j)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j=X^TAY$$

上式说明，取定一组基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 后，内积 $(\bullet,\bullet)$ 完全由度量矩阵 A 决定。

度量矩阵一定是正定的：

- 由于内积的对称性，$a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\varepsilon_j,\varepsilon_i)=a_{ji}$，这说明 A 是对称矩阵；
- 由于内积的正定性，对于 $X\neq 0\in\mathbb{R}^n$，令 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X\neq 0\in V$，则有 $X^TAX=(\alpha,\alpha)>0$，这说明 A 是正定矩阵。

反过来，任意一个正定矩阵 A 可以决定 V 上的一个内积 $(\bullet,\bullet)$：取 V 的一组基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$，定义 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}$，通过线性组合将这一定义拓展到 V 上。不难验证 $(\bullet,\bullet)$ 是 V 上的一个内积，并且 A 是 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 关于 $(\bullet,\bullet)$ 的度量矩阵。

上述两条总结起来就是下面的定理。

定理 29.3 (内积和正定矩阵一一对应) 设 V 是 n 维欧氏空间，取定 V 的一组基 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$，则 V 上的内积 $(\bullet,\bullet)$ 和 n 阶正定矩阵 A 形成一一对应。

定理 29.4 (内积在不同基下度量矩阵的关系) 设 $(V,(\bullet,\bullet))$ 是 n 维欧氏空间, $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},T=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是 V 的两组基，P 是从 S 到 T 的过渡矩阵。若 $(\bullet,\bullet)$ 在 S 和 T 下的度量矩阵分别为 A 和 B，则我们有 $B=P^TAP$。

注记. 可以这么理解：对于任意 $\alpha,\beta\in V$，设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X_1=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y_1,\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X_2=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y_2$，那么有

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)&=Y_1^TBY_2\\&=X_1^TAX_2=Y_1^TP^TAPY_2\end{aligned}$$

最后一步使用了坐标的变换。

上述相合关系启发我们选取 V 的一组更合适的基，使得度量矩阵 A 更加简单。

定义.（正交向量组，标准正交基）设 V 是 n 维欧氏空间，

(1) V 中正一组两两交的非零向量称为一个正交向量组；

(2) V 中有两两正交并且长度为 1 的向量组构成的基称为一个标准正交基。

注记. 不难证明，正交向量组一定是线性无关向量组，因此它至多含有 n 个向量。

定理 29.5 (Gram-Schmidt 正交化) 设 V 是 n 维欧氏空间，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 是 V 中一个线性无关组，则存在向量组 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$，满足以下性质

(1) $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是标准正交向量组；

(2) $\beta_i\in L\{\alpha_1,\cdots,\alpha_i\},1\leqslant i\leqslant m$。

注记. Gram-Schimidt 正交化的过程如下：

(1) 令 $\gamma_1=\alpha_1$；

(2) 如果已经得到 $\gamma_1,\cdots,\gamma_i$，则令

$$\gamma_{i+1}=\alpha_{i+1}-\frac{(\alpha_{i+1},\gamma_1)}{(\gamma_1,\gamma_1)}\gamma_1-\cdots-\frac{(\alpha_{i+1},\gamma_i)}{(\gamma_i,\gamma_i)}\gamma_i$$

(3) 继续以上过程，得到 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$，然后令 $\beta_i=\dfrac{1}{|\gamma_i|}\gamma_i$，得到 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$。

注记. 性质 *(2)* 说明，存在**上三角形矩阵**$P \in M_m(\mathbb{R})$ 使得 $(\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)P$，从保持线性无关可以看出 P 是 m 阶可逆矩阵。

例 173 在 $\mathbb{R}^4$ 中，用 Gram-Schmidt 方法将下列向量组正交化：

$$v_1 = (1,1,1,1)^T, v_2 = (2,2,2,-2)^T, v_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$$

例 174 设 V 是一个 3 维欧氏空间，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 V 的一组基。已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$。

用 Schmidt 正交化给出 V 的一组标准正交基：$\eta_1 = \_\_\_\_\_, \eta_2 = \_\_\_\_\_, \eta_3 = \_\_\_\_\_$。

例 175 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明：存在可逆上三角矩阵 $C \in M_n(\mathbb{R})$，使得 $A = C^T C$。

例 176 设 V 是 n 维欧氏空间，φ 是 V 上的可逆线性变换，证明：φ 保持向量的夹角不变当且仅当 φ 保持向量的正交关系（即如果 $\alpha \perp \beta$，那么 $\varphi(\alpha) \perp \varphi(\beta)$）。

30 正交矩阵与正交变换

定义.（正交矩阵与正交变换）

(1) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，如果 A 满足 $AA^T = A^T A = I$，则称 A 为正交矩阵；

(2) 设 V 是欧氏空间，$\sigma \in L(V)$，如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$，都有 $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$，则称 σ 为正交变换。

例 177 设 α 是一个非零的实数列向量，$A = I - 2\alpha\alpha^T$。若 A 是正交矩阵，证明：α 是标准内积下的单位向量。

定理 30.1 (正交矩阵的初步性质) 设 A, B 是 n 阶正交矩阵

(1) A 的行（列）向量组构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基；

(2) $A^{-1} = A^T$；

(3) $|A| = \pm 1$；

(4) $A^{-1}, A^*, A^T, A^k, k \in \mathbb{N}_*$ 都是正交矩阵；

(5) AB 是正交矩阵。

例 178 若矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & a & b \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则 $a = \_\_\_\_\_$，$b = \_\_\_\_\_$

例 179 设 A 是 n 阶正交矩阵，X_0, Y_0 是实 n 维列向量。已知在 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积下，X_0 与 AY_0 的长度分别是 6 与 3。

(1) 求 $A^{-1}X_0+Y_0$ 的长度的最大值与最小值；

(2) 若 $|X_0-AY_0|=3\sqrt{3}$，求 AX_0 与 A^2Y_0 的夹角。

定义.（正交补）设 V 是欧氏空间，W 是 V 的子空间，令 $W^{\perp}=\{\beta\in V\,|\,\forall\alpha\in W,(\alpha,\beta)=0\}$，这称为 W 在 V 中的正交补。

定理 30.2 (不变子空间的正交补) 设 V 是欧氏空间，$\sigma\in L(V)$ 是正交变换。如果 W 是 σ 的不变子空间，那么 $W^{\perp}$ 也是 σ 的不变子空间。

定理 30.3 (正交变换的等价条件) 设 V 是 n 维欧氏空间，$\sigma\in L(V)$，则 σ 是正交变换当且仅当

(1) 保持长度：对于任意 $\alpha\in V$，都有 $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$；

(2) 将标准正交基变为标准正交基；

(3) 在任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵。

注记. *(3)* 说明正交变换具有正交矩阵的各条性质，它可以这么理解：设 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组**标准正交基**，对于任意 $\alpha,\beta\in V$，设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X,\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y$，那么有

$$(\alpha,\beta)=X^TIY=X^TY$$
$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(AX)^TI(AY)=X^TA^TAY$$

例 180 已知 (I): $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 和 (II): $\{\eta_1,\cdots,\eta_n\}$ 为 n 维欧氏空间的两组基，且满足

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$$

则下列说法中错误的是_____。

(A) 若 (I)(II) 都是标准正交基，则 A 是正交矩阵；

(B) 若 (I) 是标准正交基，A 是正交矩阵，则 (II) 是标准正交基；

(C) 若 (II) 是标准正交基，A 是正交矩阵，则 (I) 是标准正交基；

(D) 若 A 是正交矩阵，则 (I)(II) 都是标准正交基

例 181 设 V 是有限维欧氏空间，σ 是 V 上的线性变换。

(1) 若 σ 是 V 上的正交变换，证明：σ 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵；

(2) 若 σ 在 V 的某一组标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵，证明：σ 是 V 上的正交变换。

例 182 设 V 是实数域上的有限维线性空间，σ 是 V 上的线性变换且满足 $\forall v\in V,\sigma^2(v)+v=0$。

(1) 证明：σ 没有实特征值；

(2) 进一步假设 V 是欧氏空间且 σ 是一个正交变换，证明：对于任意 $\alpha\in V$，都有 $\alpha\perp\sigma(\alpha)$。

正交相似具有很好的性质，非常幸运的是，正交矩阵在正交相似之下可以化为更加简单的形式。

定理 30.4 (正交矩阵的特征值和正交相似标准形) 设 A 是 n 阶正交矩阵，

(1) A 的特征值模长都为 1，实特征值只可能为 ± 1，复特征值为共轭成对出现的单位复数；

(2) 设 A 的全部特征值为 1（出现 s 次），-1（出现 t 次）和 $\cos\theta_i \pm i\sin\theta_i, 1\leqslant i\leqslant k$（这里应有 $s+t+2k=n$），则 A **正交相似**于矩阵 $\begin{pmatrix} I_s & & & & \\ & -I_t & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_k \end{pmatrix}$，其中 $A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, 1\leqslant i\leqslant k$；

(3) 作为 *(2)* 的推论，如果 n 是奇数，那么 A 一定有实特征值。

例 183 设 A 是正交矩阵，则下列关于 A 的特征值的说法，错误的是______。

(A) 如果 $|A|=1$，则 1 一定是 A 的特征值；

(B) 如果 $|A|=-1$，则 -1 一定是 A 的特征值；

(C) A 有可能没有实特征值；

(D) A 的复特征值的模长等于 1

例 184 设 A,B 是 n 阶正交矩阵，且 $|AB|=-1$，那么 $|A+B|=$______。

例 185 求正交矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 的正交相似标准形。

例 186 欧氏空间 V 的一个保持内积不变的线性同构变换称为 V 的一个同构变换。请问欧氏空间（含无穷维）的同构变换和正交变换是同一个概念吗?【提示：关键在于是否同构】

31 实对称矩阵的正交相似对角化，对称变换

定义.（对称变换）设 V 是欧氏空间，$\sigma\in L(V)$，如果对于任意 $\alpha,\beta\in V$，都有 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$，则称 σ 为 V 上的对称变换。

例 187 设 σ 是欧氏空间 V 上的对称变换，则对任意 $\alpha,\beta\in V$，下面论断正确的是______。

(A) $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$；

(B) $(\alpha,\sigma(\beta))=(\sigma(\beta),\sigma(\alpha))$；

(C) $(\alpha,\beta)=(\sigma(\beta),\alpha)$；

(D) $(\alpha,\sigma^2(\beta))=(\sigma(\beta),\sigma(\alpha))$

定理 31.1 (对称变换和实对称矩阵的关系) 设 V 是欧氏空间，$\sigma\in L(V)$，则 σ 是对称变换当且仅当 σ 在任意一组标准正交基下的矩阵是实对称矩阵。

例 188 设 A 是实对称矩阵，证明 $A^2=0$ 的充分必要条件是 $A=0$。

例 189 设 σ 是 n 维欧式空间上的对称变换，若 $\sigma^2=0$，证明 $\sigma=0$。

定理 31.2 (特征子空间彼此正交) 设 V 是欧氏空间，$\sigma\in L(V)$ 是对称变换，如果 λ,μ 是 σ 的两个不同特征值，则 $V_\lambda\perp V_\mu$。

定理 31.3 (不变子空间的正交补) 设 V 是欧氏空间，$\sigma\in L(V)$ 是对称变换。如果 W 是 σ 的不变子空间，那么 $W^\perp$ 也是 σ 的不变子空间。

现在我们来到本学期最深刻且最重要的定理。

定理 31.4 (实对称矩阵的特征值和正交相似标准形) 设 A 设 n 阶实对称矩阵，

(1) A 的特征值都为实数；

(2) 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则 A 正交相似于矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$；

(3) 作为 *(2)* 的推论，实二次型 $f(X)=X^TAX$ 可以通过可逆线性变换化为 $f(Y)=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，这称为 f 的主轴形式。

例 190 设 V 欧氏空间，$\sigma\in L(V)$，称 σ 为反对称的，如果对任意 $\alpha,\beta\in V$，都有 $(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta))$。证明

(1) σ 是反对称的当且仅当 σ 在一组标准正交基下的矩阵为反对称矩阵；

(2) 如果 W 是反对称线性变换 σ 的不变子空间，那么它的正交补空间 $W^\perp$ 也是。

现在我们来看实对称矩阵正交相似对角化定理的若干应用。

计算正交相似标准形

例 191 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 使得 P^TAP 为对角矩阵。

例 192 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$。

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵；

(2) 用正交的线性替换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形。

研究矩阵的性质

例 193 设 n 阶实对称方阵 A 只有一个特征值，则其特征子空间的维数是_____。

例 194 设 A 是 4 阶实对称矩阵，$(A^2-A)(A^2+I)=0$。若 A 的秩为 3，则 A 相似于_____。

(A) $\begin{pmatrix}1 & & & \\ & i & & \\ & & -i & \\ & & & 0\end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix}1 & & & \\ & i & 1 & \\ & & -i & \\ & & & 0\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

例 195（判断）两个 n 阶实对称矩阵正交相似的充要条件是它们相似。

例 196 设 A 是 n 阶实对称矩阵，则 A 是正定矩阵当且仅当存在 n 阶正定矩阵 B 使得 $A = B^2$。

32 特征值专题

同时相合对角化技巧

例 197 设 A 是 n 阶实对称正定矩阵，B 是 n 阶实对称矩阵，证明：

(1) 存在实可逆矩阵 P 使得 $P^TAP = I, P^TBP$ 为对角形；

(2) 若矩阵 AB 的特征值都是正实数，则 B 是正定矩阵。

例 198 设 A, B 是 n 阶正定矩阵，证明：如果 $A - B$ 是正定矩阵，则 $B^{-1} - A^{-1}$ 也是正定矩阵。

其他有关特征值的问题

例 199 设 $A \in M_4(\mathbb{R})$ 既是正交方阵又是正定方阵，那么 $|5A - 3I| =$______。

例 200 设 Q 是 n 阶正交矩阵，$A = \operatorname{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}$，$m = \min\{|a_i|\}, M = \max\{|a_i|\}$。证明：矩阵 QA 的任意特征值 λ 都满足 $m \leqslant |\lambda| \leqslant M$。

例 201 设 A, B 是 n 阶半正定矩阵

(1) 如果 $\operatorname{tr} A = 0$，证明 $A = O$；

(2) 如果 $\operatorname{tr}(AB) = 0$，证明 $AB = O$。

例 202 设 A, B 是 n 阶半正定矩阵，证明：AB 的所有特征值都是非负实数。进一步地，如果 A, B 都是 n 阶正定矩阵，证明：AB 的所有特征值都是正实数。

例 203 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 是 A 的从小到大的全体特征值。证明

$$\lambda_n = \max_{0 \neq X \in \mathbb{R}^n} \frac{X^TAX}{X^TX}, \lambda_1 = \min_{0 \neq X \in \mathbb{R}^n} \frac{X^TAX}{X^TX}$$

例 204 设 A 是实矩阵，$\lambda = a + bi, b \neq 0$ 为 A 的一个虚特征值，$X = X_1 + X_2 i$ 为 λ 的复特征向量，X_1, X_2 分别为其实部和虚部。证明 X_1, X_2 在复数域上线性无关。